I FONDAMENTALI

Le parole dell'epidemia spiegate dai docenti di Scienze Statistiche di Padova

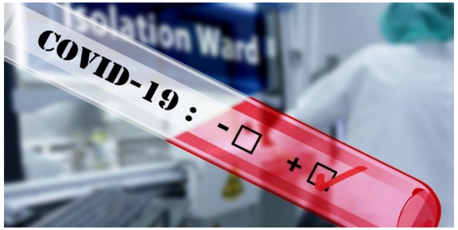
PERCHÉ FARE 2 TAMPONI?
La risposta è nel Teorema di Bayes

Università degli Studi di Padova

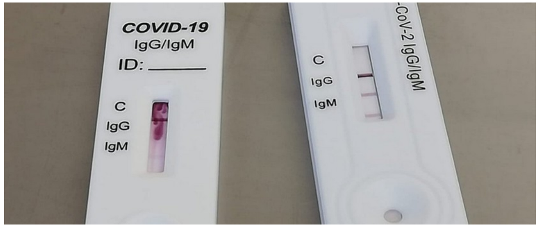
Dipartimento di Scienze Statistiche

Prof.ssa
LAURA VENTURA

docente di
STATISTICA MEDICA
e di
MODELLI STATISTICI



Sono guarito?



- Come si effettua la verifica di guarigione dal Covid-19?

- Al termine del periodo di cura, sia il paziente asintomatico sia il paziente sintomatico devono sottoporsi a **2 tamponi** che si praticano a distanza di 24 ore l'uno dall'altro.

- Se entrambi risultano negativi, si può affermare con una "certa sicurezza" la scomparsa del virus.

Ma perché due?

Premessa

breve riepilogo della *tabella di errata classificazione* per un intuitivo salto concettuale

(dal video sulle parole dell'epidemia: Test diagnostici, sensibilità e specificità)

	Malato (*M*)	**Sano (*S*)**	
Test Positivo	VP	FP	VP+FP
Test Negativo	FN	VN	FN+FP
	Totale *M*	**Totale *S***	**Totale**

Sensibilità = VP/(Tot *M*)

Specificità = VN/(Tot *S*)

Ogni casella ha numeri interi (freq. assolute)

es. VP = n° Veri Positivi (Malato e Positivo)
FN = n° Falsi Negativi (Malato e Negativo)
Totale *S*= n° Sani
ecc.

Se in ogni casella dividiamo per il **Totale** si ottengono le corrispondenti proporzioni (frequenze relative)

Con un **intuitivo salto concettuale**, possiamo interpretare la *frequenza relativa* come una *probabilità* (o meglio, come un'*approssimazione o stima della probabilità*).

es. VP/Totale rappresenta la probabilità che un individuo della popolazione in studio sia un VP

Esempio numerico

riprendiamo la tabella su un test sierologico

(dal video sulle parole dell'epidemia: Test diagnostici, sensibilità e specificità)

	Malato (*M*)	**Sano (*S*)**	**Totale**
Test Positivo (T^+)	17	2	**19**
Test Negativo (T^-)	3	48	**51**
Totale	**20**	**50**	**70**

	Malato (*M*)	**Sano (*S*)**	**Totale**
Test Positivo (T^+)	17/70	2/70	**19/70**
Test Negativo (T^-)	3/70	48/70	**51/70**
Totale	**20/70**	**50/70**	**1**

In simboli, $P(A)$ = probabilità di A

	Malato (*M*)	**Sano (*S*)**	
Test positivo (T^+)	$P(M \text{ e } T^+)$	$P(S \text{ e } T^+)$	$\boldsymbol{P(T^+)}$
Test negativo (T^-)	$P(M \text{ e } T^-)$	$P(S \text{ e } T^-)$	$\boldsymbol{P(T^-)}$
	$\boldsymbol{P(M)}$	$\boldsymbol{P(S)}$	

Il test diagnostico

- Il test diagnostico attualmente utilizzato per la diagnosi del Covid-19 è il **test molecolare con metodo Real Time PCR** per SARS-CoV-2 indicato dall'OMS (il cosiddetto *tampone*).

- Il test ha (valori arrotondati) sensibilità del 95% e specificità del 95%.

- Formalizziamo le caratteristiche del test:

  - M = (il paziente è malato)
  - S = (il paziente è sano)
  - T^+ = (il test è positivo)
  - T^- = (il test è negativo)

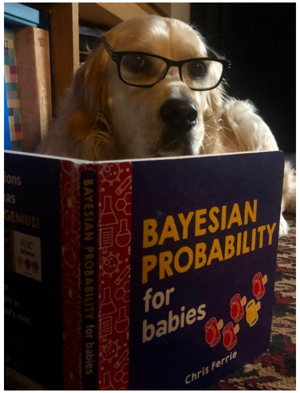
	Malato	Sano
Test positivo	$P(M \text{ e } T^+)$	$P(S \text{ e } T^+)$
Test negativo	$P(M \text{ e } T^-)$	$P(S \text{ e } T^-)$
	$P(M)$	$P(S)$

Sensibilità = $P(M \text{ e } T^+)/P(M)$

Specificità = $P(S \text{ e } T^-)/P(S)$

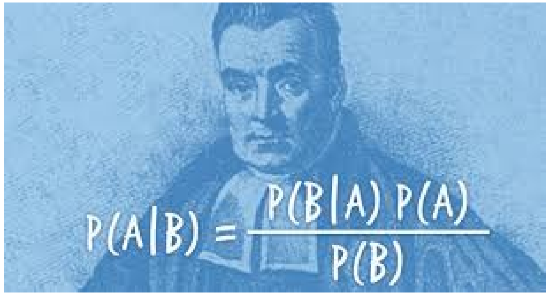
$$\text{Sensibilità} = \frac{P(M \text{ e } T^+)}{P(M)} = P(T^+|M) = 0.95$$

$$\text{Specificità} = \frac{P(S \text{ e } T^-)}{P(S)} = P(T^-|S) = 0.95$$



A noi interessa $P(S|T^{-})$

(probabilità di essere effettivamente sano essendo risultato negativo al test)



reverendo T. Bayes (1702-1761)

- Il **teorema di Bayes** (o teorema della probabilità delle cause) viene usato per calcolare la probabilità della causa di un evento: in questo caso la probabilità che un paziente sia S, essendo risultato T^{-} al *tampone*.

- Conoscendo la frequenza con cui si presenta la malattia e la performance del test diagnostico, esso permette di calcolare la probabilità che una certa persona abbia effettivamente contratto la malattia per cui ha eseguito il test diagnostico (nel caso in cui questo sia risultato positivo) o viceversa non sia affetta da tale malattia (nel caso in cui il test sia risultato negativo).

- La performance del test (specificità e significatività) è:

$$P(T^+|M) = P(T^-|S) = 0.95$$
$$P(T^-|M) = P(T^+|S) = 0.05$$

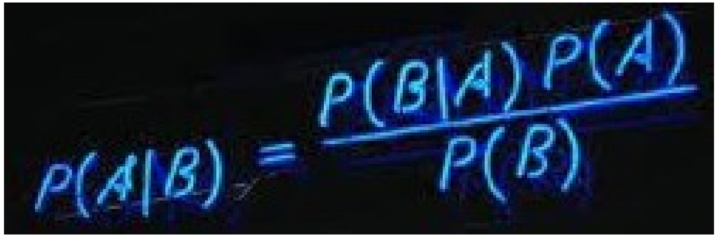
Ma non conosciamo la PREVALENZA $P(M)$

- Attualmente le “stime”, fatte regione per regione, variano da circa 0.4% a 10%.
- Ma noi assegniamo, più pessimisticamente, $P(M) = 0.2$ (20%).
- Quindi $P(S) = 1 - P(M) = 0.8$ (80%).
- Noi vogliamo $P(S|T^-)$.

	Malato	Sano	
Test positivo	$P(M \text{ e } T^+)$	$P(S \text{ e } T^+)$	$P(T^+)$
Test negativo	$P(M \text{ e } T^-)$	$P(S \text{ e } T^-)$	$P(T^-)$
	$P(M)$	$P(S)$	

$$P(S|T^-) = \frac{P(S \text{ e } T^-)}{P(T^-)}$$

	Malato	Sano	
Test positivo	$P(M \text{ e } T^+)$	$P(S \text{ e } T^+)$	$P(T^+)$
Test negativo	$P(M \text{ e } T^-)$	$P(S \text{ e } T^-)$	$P(T^-)$
	$P(M)$	$P(S)$	



$$
\begin{aligned}
P(S|T^-) &= \frac{P(S \text{ e } T^-)}{P(T^-)} \\
&= \frac{P(T^-|S)P(S)}{P(S \text{ e } T^-) + P(M \text{ e } T^-)} \\
&= \frac{P(T^-|S)P(S)}{P(T^-|S)P(S) + P(T^-|M)P(M)} \\
&= \frac{0.95 \times 0.8}{0.95 \times 0.8 + 0.05 \times 0.2} \\
&= 0.987
\end{aligned}
$$

$P(A|B) = P(A \text{ e } B)/P(B)$

$P(A \text{ e } B) = P(A|B)P(B)$

Questo è il
Teorema di Bayes!

con una probabilità del 98.7% sono guarito se il mio tampone è negativo

E perché allora due tamponi?

- Ho una probabilità del 98.7% di essere guarito se il mio primo tampone è negativo

- Rifacciamo il tampone e calcoliamo $P(S|T_1^-, T_2^-)$

- Si usa sempre il **teorema di Bayes** ma con 0.987 quale probabilità iniziale: $P(S|T_1^-)$ invece che $P(S)$

$$\begin{aligned} P(S|T_1^-, T_2^-) &= \frac{P(T_2^-|S)P(S|T_1^-)}{P(T_2^-|S)P(S|T_1^-) + P(T_2^-|M)P(M|T_1^-)} \\ &= \frac{0.95 \times 0.987}{0.95 \times 0.987 + 0.05 \times 0.013} \\ &= 0.999 \end{aligned}$$