Temi proposti all'esame di ammissione (cicli I-XVIII)

I ciclo

Tema 1

Il candidato illustri i principali tipi di campionamento, eseguendo opportune comparazione fra i medesimi, e mettendo in evidenza le possibilità applicative.

Tema 2

Il candidato illustri i principi generali dell'induzione e della inferenza statistica, e presenti una classificazione ragionata delle procedure inferenziali.

Tema 3

Il candidato illustri le procedure di stima statistica, sotto ipotesi parametriche e non-parametriche, soffermandosi criticamente sulle proprietà normalmente richieste agli stimatori e sui criteri di ottimalità.

II ciclo

Tema 1

Il modello classico di regressione lineare: problemi di stima e di verifica di ipotesi.

Tema 2

I concetti di dipendenza nell'ambito della statistica e relativi indicatori.

Tema 3

Teoria e metodi di stima dei parametri.

III ciclo

Tema 1

Si illustrino le caratteristiche generali delle diverse metodologie statistiche multivariate e si descriva nei particolari almeno uno tra i seguenti metodi:

- analisi delle componenti principali
- analisi dei fattori
- analisi dei gruppi (*cluster analysis*)

accennando eventualmente a possibili applicazioni in campo economico o sociale.

Tema 2

Si illustrino le caratteristiche salienti dei principali schemi di campionamento e si descriva nei particolari almeno uno tra i seguenti:

- campionamento stratificato
- campionamento a più stadi

accennando eventualmente a possibili applicazioni per lo svolgimento di indagini in campo economico o sociale.

Tema 3

Il candidato illustri il modello di regressione lineare multipla, con particolare riferimento alle ipotesi sottostanti al medesimo. Si esaminino quindi gli effetti della violazione di almeno una di tali ipotesi (a scelta del candidato). Si accenni eventualmente a possibili impieghi del modello di regressione lineare multipla in campo economico o sociale.

IV ciclo

Tema 1

Le variabili casuali come componente essenziale della teoria statistica probabilistica: le principali variabili casuali ed il loro impiego nell'inferenza statistica.

Tema 2

L'inferenza statistica: i fondamenti concettuali e le conseguenti soluzioni ottimali per i problemi di stima e di verifica di ipotesi.

Tema 3

Il problema della stima: criteri generali proposti dalla teoria statistica ed i più consueti metodi di stima.

V ciclo

Tema 1

Metodi statistici di analisi delle relazioni tra variabili con particolare riferimento a problemi di stima e verifica d'ipotesi nel modello lineare generalizzato.

Tema 2

Le variabili casuali come modelli di interpretazione stocastica della variabilità: loro uso nel problema di stima paramterica.

Tema 3

Esporre:

- il principio di campionamento statistico come metodo generale di investigazione scientifica;
- i principali metodi di campionamento da popolazioni finite.

VI ciclo

Tema 1

Il modello classico di regressione lineare: aspetti generali. Problemi di stima dei parametri e verifica di ipotesi sul modello. Uso del modello a fini previsivi.

Tema 2

Stima e verifica di ipotesi statistiche: analogie e differenze concettuali e operative.

Tema 3

Metodi statistici per l'analisi delle relazioni tra variabili: aspetti descrittivi ed inferenziali.

VII ciclo

Tema 1

Verifica di ipotesi statistiche: fondamenti concettuali e soluzioni ottimali.

Tema 2

Stima dei parametri: proprietà e criteri di ottimalità.

Tema 3

I modelli lineari: problemi di stima e di verifica d'ipotesi.

VIII ciclo

Tema 1

- ▷ Il candidato esponga la nozione di sufficienza e le sue connessioni con i più importanti concetti dell'inferenza statistica.

- ▷ Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione i.i.d. estratto da una variabile aleatoria X con densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{(k+1)x^k}{a^{k+1}} & \text{se } 0 < x \leq a \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

  con k parametro noto, $k > -1$.

  - Proporre uno stimatore di a ottenuto con il metodo dei momenti e studiarne la consistenza.
  - Proporre uno stimatore sufficiente del parametro a.
  - Proporre uno stimatore di massima verosimiglianza di a.

– Effettuare una valutazione comparativa degli stimatori ottenuti.

Tema 2

▷ Il candidato esponga i principali modi di convergenza nella teoria della probabilità colegandoli con la nozione di consistenza di uno stimatore.

▷ Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione i.i.d. estratto da una variabile aleatoria X con densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} \theta(1-x)^{\theta-1} & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

– Proporre uno stimatore di massima verosimiglianza di θ.

– Mostrare che tale stimatore è asintoticamente corretto.

– Dimostrare che lo stimatore ottenuto è consistente.

– Proporre uno stimatore consistente di $\mathrm{Var}(X)$.

– Proporre uno stimatore corretto e consistente di $P(X \leq 0{,}5)$.

Tema 3

▷ Il candidato illustri i principali metodi di previsione.

▷ Il candidato ottenga una previsione della variabile di interesse (specificando le opportune ipotesi) nel caso di

– un modello lineare semplice,

– un modello autoregressivo del primo ordine,

– un modello (diverso dai primi due) a scelta,

giustificando opportunamente la sua scelta.

IX ciclo

Tema 1

▷ Il candidato illustri la stima di massima verosimiglianza e le sue proprietà.

▷ Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione i.i.d. estratto da una variabile aleatoria X con densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} \theta \exp(-\theta x) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- Proporre uno stimatore di massima verosimiglianza di θ.
- Mostrare che tale stimatore è asintoticamente non distorto.
- Dimostrare che lo stimatore ottenuto è consistente.
- Proporre uno stimatore non distorto di θ e confrontarlo in termini di efficienza con quello di massima verosimiglianza.

Tema 2

▷ Il candidato esponga i principali aspetti della verifica d'ipotesi parametrica secondo l'approccio di verosimiglianza.

▷ Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione i.i.d. estratto da una variabile aleatoria $X \sim Ga(\lambda, 3)$, con una densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda^3 x^2 \exp(-\lambda x)/2 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- Proporre un test basato sulla verosimiglianza per saggiare l'ipotesi $H_0: \lambda = 1$ vs $H_1: \lambda \neq 1$.
- Studiare la distribuzione del test in ipotesi nulla (H_0).
- Dare la funzione di potenza del test in ipotesi alternativa (H_1).

Tema 3

- ▷ Il candidato illustri i principali aspetti dei metodi non parametrici per la stima e la verifica d'ipotesi.

- ▷ Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione i.i.d. estratto da una variabile aleatoria X con funzione di ripartizione $F(x)$. Si consideri la funzione di ripartizione empirica

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I_{(-\infty,x)}(X_i).$$

  - Mostrare che $F_n(x)$ è uno stimatore non distorto e consistente di $F(x)$.
  - Studiare il comportamento asintotico di tale stimatore.
  - Proporre uno stimatore non distorto e consistente di $\Pr\{a < X \leq b\}$, con a e b fissati ($a < b$).

X ciclo

Tema 1

- ▷ Il candidato illustri il principio di verosimiglianza e ne discuta l'utilizzo nell'ambito della teoria della stima parametrica.

- ▷ Siano $X_1, \ldots, X_n$ variabili casuali indipendenti e identicamente distribuite, con funzione di densità

$$f_X(x) = \frac{2x}{\theta^2} I_{(0,\theta)}(x)$$

  dove $I_A(x)$ rappresenta la funzione indicatrice dell'insieme A e θ è un parametro ignoto e positivo.

  - Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza di θ.

- Verificare se lo stimatore ottenuto è asintoticamente non distorto.
- Verificare se esso è consistente.

Tema 2

▷ Il candidato illustri il modello di regressione, con particolare attenzione alla stima dei parametri e alla verifica delle ipotesi sul modello.

▷ Siano $Y_1, \ldots, Y_n$ variabili casuali indipendenti, con funzioni di densità

$$f_{Y_i}(y) = (\theta x_i)^{-1} \exp\left\{\frac{-y}{\theta x_i}\right\} I_{(0,+\infty)}(y)$$

dove $I_A(y)$ è la funzione indicatrice dell'insieme A, le x_i sono costanti note e positive e θ è un parametro ignoto e positivo.

- Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza di θ.
- Verificare se lo stimatore ottenuto è non distorto.
- Verificare se esso è consistente.

Tema 3

▷ Il candidato illustri il problema della verifica statistica delle ipotesi, con particolare attenzione al test del rapporto di verosimiglianza.

▷ Siano $Y_1, \ldots, Y_n$ variabili casuali indipendenti identicamente distribuite, con funzione di densità

$$f_Y(y) = \theta^{-1} \exp\{-y/\theta\} I_{(0,+\infty)}(y)$$

dove $I_A(y)$ è la funzione indicatrice dell'insieme A e θ è un parametro ignoto e positivo.

- Determinare il test di verosimiglianza per saggiare l'ipotesi nulla $H_0 : \theta = \theta_0$ contro l'alternativa $H_1 : \theta > \theta_0$.
- Studiare la distribuzione della funzione test sotto H_0.

- Determinare la funzione di potenza del test.

XI ciclo

Tema 1

▷ Il candidato illustri il modello di regressione, con particolare attenzione alla stima dei parametri e alla verifica delle ipotesi sul modello.

▷ Siano $Y_1, \ldots, Y_n$ variabili casuali indipendenti, con funzione di densità

$$f_{y_i}(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[y - \alpha X_{1i} - \beta X_{2i}\right]^2\right\},$$

dove X_{1i} e X_{2i} e σ sono costanti note e α e β sono parametri ignoti.

- Determinare gli stimatori di massima verosimiglianza di α e β.
- Verificare se gli stimatori ottenuti sono non distorti
- Verificare se sono consistenti.

Tema 2

▷ Il candidato illustri e confronti le proprietà dei tre principali metodi di stima:

- Dei momenti.
- Dei minimi quadrati.
- Della massima verosimiglianza.

▷ Siano $Y_1, \ldots, Y_n$ variabili casuali indipendenti con funzioni di densità

$$f_{y_i}(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[y - \varphi(X_i; \theta_0, \cdots, \theta_k)\right]^2\right\},$$

dove φ è un qualsiasi polinomio di grado k in X_i, X_i e σ sono costanti note e $\theta_0, \ldots, \theta_k$ sono parametri ignoti.

Dimostrare che il metodo dei minimi quadrati e di massima verosimiglianza producono le stesse stime dei parametri $\theta_0, \ldots, \theta_k$.

Tema 3

- ▷ Il candidato esponga i principali aspetti della verifica di ipotesi parametrica.

- ▷ Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione i.i.d. estratto da una variabile casuale di densità di probabilità

$$f_X(x) = \frac{1}{\theta} \qquad \text{per } 0 \leq x \leq \theta.$$

  - Proporre un test per saggiare l'ipotesi $H_0 : \ \theta = 1$ contro l'alternativa $H_1 : \ \theta > 1$.
  - Costruire e commentare la funzione di potenza del test in ipotesi alternativa (H_1).

XII ciclo

Tema 1

- ▷ Il candidato illustri gli elementi salienti della teoria statistica sulla stima intervallare e sulla verifica delle ipotesi, mettendo in rilievo analogie e differenze di obiettivi fra le due classi di procedure statistiche.

- ▷ Siano X e Y due variabili casuali univariate indipendenti, ciascuna con funzione di densità di probabilità marginale

$$f(z; \theta) = \theta^2 z e^{-\theta z} I_{(0,+\infty)}(z),$$

dove $I_A(z)$ è la funzione indicatrice dell'insieme A e $\theta < 0$. Sia $T = X+Y$ e $U = X$. Si ottenga la distribuzione congiunta di (T, U) (supporto e funzione di densità di probabilità). Si determinino supporto e funzione di densità di probabilità di $U|T = t$, dove $t > 0$. Si dica, motivando, se T e U sono indipendenti e se T è statistica sufficiente.

Tema 2

- ▷ Il candidato illustri alcuni modelli statistici parametrici notevoli, accennando alla loro genesi e approfondendo alcuni problemi inferenziali ad essi relativi.

- ▷ Siano $Y_1, \ldots, Y_n$ variabili casuali univariate indipendenti, aventi distribuzioni marginali con funzione di densità di probabilità

$$f(u; \theta) = \frac{1}{\theta} I_{[0,\theta]}(u),$$

dove $I_A(u)$ è la funzione indicatrice dell'insieme A e $\theta > 0$ è un parametro ignoto. Sia poi

$$T_n = \max_{i=1,\ldots,n} Y_i.$$

Ricavare la funzione di densità di T_n e ottenere stime di massima verosimiglianza dei suoi parametri.

Tema 3

- ▷ Statistiche sufficienti: definizione, proprietà, utilizzazione nell'inferenza statistica.

- ▷ Siano $y_1, \ldots, y_n$ realizzazioni delle variabili casuali indipendenti Y_1 , $\ldots, Y_n$ aventi distribuzioni marginali normali con valore atteso μ e varianza 1. Allo scopo di stimare $\theta = \Pr(Y_i > 10)$, si utilizza la statistica $\theta_n = 1 - \Phi(10 - y_n)$, dove y_n è la media campionaria e $\Phi(\cdot)$ è la funzione di ripartizione della variabile casuale $N(0, 1)$.

- Si dica perchè tale stimatore è ragionevole.
- Si calcoli la distribuzione campionaria esatta di θ_n (supporto e funzione di densità di proabilità). Si proponga un'approssimazione per tale distribuzione, utilizzabile per n sufficientemente grande.

  (Facoltativo) Si suggerisca un intervallo di confidenza per θ con livello di confidenza approsimato 0.95.

XIII ciclo

Tema 1

La stima puntuale:

- Principi generali.
- Principali approcci e metodi per ricavare stimatori.
- Criteri di valutazione e comparazione tra stimatori.
- Per ciacuna delle seguenti famiglie di densità sia $(X_1, \ldots, X_n)$ un campione casuale. Si determini il "migliore" stimatore non distorto di θ^r $(r \geq 1)$ quando

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\theta}, \quad 0 < x < \theta,\, \theta > 0,$$

$$f(x|\theta) = e^{-(x^\theta)}, \quad x > \theta,\, \theta \in \mathbb{R}.$$

Tema 2

La verifica delle ipotesi:

- Principi generali.
- Principali approcci e metodi per ricavare test.

- Criteri di valutazione e comparazione tra test.
- Sia X una osservazione dalla densità $f(X|\theta) = \theta X^{\theta-1}$, con $0 < x < 1$, $\theta > 0$.

  Si consideri la verifica di $H_0: \ \theta \leq 1$ contro $H_1: \ \theta > 1$. Si determini l'ampiezza e si tracci il grafico della funzione di potenza del test avente regione critica $x > 1/2$.

  Si determini il test più potente di ampiezza α di $H_0: \ \theta = 1$ contro $H_1: \ \theta = 2$.

Tema 3

Intervalli di confidenza:

- Principi generali.
- Principali approcci e metodi per ricavare intervalli di confidenza.
- Relazioni con il problema della verifica d'ipotesi.
- Ottenere l'intervallo di confidenza di ampiezza $1-\alpha$ per il parametro θ in un campione di dimensione uno dalla distribuzione

$$f(x|\theta) = \frac{2}{\theta^2}(\theta - x), \quad 0 < x < \theta.$$

XIV ciclo

Tema 1

Il ruolo delle informazioni ausiliarie nell'inferenza condizionata.

- Principi generali connessi alla teoria delle variabili casuali.
- Principi generali nell'inferenza statistica.

- Esempi particolari nell'inferenza statistica.
- Data la distribuzione congiunta

$$f(x, y) = e^{-y} \qquad 0 < x < y < \infty,$$

calcolare $V(Y|x)$, $V(Y)$. Commentare i risultati.

Tema 2

Il modello di regressione per lo studio delle relazioni tra variabili.

- Specificazione delle assunzioni sul modello.
- Procedure di stima dei parametri.
- Verifica di ipotesi sui parametri.
- Il problema della previsione.
- Sia y un vettore casuale n-dimensionale generato in accordo al modello $y = X\beta + \varepsilon$, dove X è una matrice non stocastica di dimensioni $n \times p$ e rango p, $E\{\varepsilon\} = 0$, $\text{var}(\varepsilon) = \sigma^2\Omega$.
Si assuma inoltre che Ω sia una matrice $n \times n$ nota e di rango pieno mentre β, σ^2 sono parametri ignoti.

  Mostrare come, mediante una opportuna trasformazione lineare delle osservazioni, sia possibile ricondurre il modello descritto ad un modello di regressione lineare che soddisfa le usuali ipotesi del secondo ordine.

  Utilizzando il modello trasformato, determinare lo stimatore lineare ottimale di β.

  Calcolare la matrice delle varianze e covarianze dello stimatore ottenuto.

  Ottenere la previsione al tempo $n + 1$.

Tema 3

La funzione di verosimiglianza e il suo impiego nell'inferenza statistica.

- Considerazioni generali.
- Principio di verosimiglianza.
- Si consideri una successione di v.a. osservabili X_i condizionatamente i.i.d. con una comune densità campionaria del tipo

  $$f(X; \beta_1, \beta_2) = 0{,}3\,\mathrm{Beta}(\alpha = 2, \beta_1) + 0{,}7\,\mathrm{Beta}(\alpha = 2, \beta_2),$$

  essendo la forma funzionale della densità Beta

  $$g(y; a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} y^{a-1}(1-y)^{b-1}$$

  con Γ funzione di Eulero verificante le

  $$\begin{aligned} \Gamma(z+n) &= \Gamma(z) \cdot z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1) \\ & \Gamma(n) = (n-1)! \end{aligned}$$

  e si determinino le stime di massima verosimiglianza per β_1 e β_2.

XV ciclo

Tema 1

I vari tipi di convergenza.

- Aspetti generali.
- Relazioni con le proprietà asintotiche di uno stimatore.

- Estratto un campione i.i.d. di dimensione n dalla variabile casuale X di funzione di densità
$$f(x, \varphi) = \varphi^{-1} x^{(1-\varphi)\varphi^{-1}}$$
per $0 < x < 1$ e $0 < \varphi < 1$, trovare lo SMV per φ e verificarne non distorsione e consistenza.

Tema 2

La funzione di verosimiglianza.

- Aspetti generali.
- La verifica di ipotesi secondo l'approccio di verosimiglianza.
- Estratto un campione i.i.d. di dimensione n da una variabile casuale Binomiale di parametri (k, p), determinare il test di verosimiglianza per verificare l'ipotesi nulla $H_0 : p = 1/2$ contro l'alternativa $p > 1/2$ e studiarne la distribuzione sotto H_0.

Tema 3

Intervalli di confidenza.

- Aspetti generali.
- Approcci e metodi per la costruzione di intervalli di confidenza.
- Ottenere un intervallo di confidenza di ampiezza $1 - \alpha$ per il parametro θ in un campione i.i.d. di dimensione n da una distribuzione $N(\theta, \theta)$, con $\theta > 0$.

XVI ciclo

Tema 1

Proprietà campionarie della stima di massima verosimiglianza in modelli statistici parametrici regolari.

- Definizioni di base.
- Proprietà campionarie della score calcolata al vero valore del parametro.
- La diseguaglianza di Cramér-Rao.
- Lo stimatore di massima verosimiglianza: sua consistenza e distribuzione asintotica.
- Illustrazione dei risultati teorici esposti con riferimento a due modelli statistici parametrici notevoli scelti nell'ambito delle famiglie esponenziali.
- Esposizione succinta delle critiche sollevabili contro le stime di massima verosimiglianza e cenni ad altri approcci ai problemi di stima puntuale.

Tema 2

Regioni di confidenza e stima intervallare.

- Perché conviene affiancare a una stima puntuale di un parametro ignoto una regione di confidenza?
- Regioni di confidenza, probabilità di copertura, livello di confidenza.
- Commenti sul significato post-sperimentale del livello di confidenza (si consideri una regione di confidenza ottenuta inserendo i dati osservati nella definizione di una regione di confidenza con livello di confidenza 0.95: conterrà il vero valore del parametro? Come si interpreta 0.95?)

- La costruzione di regioni di confidenza con livello di confidenza assegnato (esatto o nominale): impostazione basata sulle quantità pivotali, impostazione di Neyman, impostazione basata sulla funzione di verosimiglianza.

- Illustrazione delle considerazioni e dei calcoli legati a tali impostazioni con riferimento a due modelli statistici notevoli scelti nell'ambito delle famiglie esponenziali.

Quesito comune ai due temi

Sia X una variabile casuale univariata assolutamente continua con funzione di densità di probabilità

$$\frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Si verifichi che la distribuzione di probabilità di $T = 1/X$ è la medesima di X.

- Si consideri il modello statistico corrispondente alle distribuzioni di probabilità di $Y = \mu + X$, $\mu \in \mathbb{R}$. Sia $y_1, \ldots, y_n$ un campione casuale semplice estratto da Y. Si proponga una stima di μ, funzione esplicita dei dati. Si dica perché è ragionevole.

XVII ciclo

Tema 1

- ▷ Il candidato presenti il modello di regressione lineare classico e discuta gli effetti della violazione delle usuali assunzioni sulle procedure inferenziali.

▷ Siano $Y_1, \ldots, Y_n$ variabili casuali indipendenti con funzione di densità

$$f_{Y_i}(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2}[y - \alpha - \beta X_i - \gamma Z_i]^2 \right\},$$

dove X_i, Z_i sono costanti note. Si ricavi un test per verificare l'ipotesi $H_0 : \beta + \gamma = 1$ contro l'alternativa bilaterale $H_1 : \beta + \gamma \neq 1$.

Tema 2

▷ Il candidato illustri gli aspetti generali della stima intervallare, i principali metodi di derivazione degli intervalli e discuta le connessioni con la verifica di ipotesi

▷ Sia X una variabile casuale continua a valori reali con funzione di ripartizione $F(X)$. Si ricavi la distribuzione di $Y = F(X)$. Si illustri inoltre un possibile utilizzo pratico di tale risultato.

Tema 3

▷ Il candidato illustri e metta a confronto le proprietà dei principali metodi di stima nell'inferenza classica.

▷ Siano $Y_1, \ldots, Y_n$ variabili casuali indipendenti con funzione di densità

$$f_Y(y) = \begin{cases} \theta^{-1} & \text{se } 0 < y \leq \theta \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si derivi lo stimatore di massima verosimiglianza del parametro θ. Proporre uno stimatore non distorto che sia funzione dello stimatore di massima verosimiglianza.

XVIII ciclo

Tema 1

Il candidato illustri il problema della verifica delle ipotesi statistiche con particola attenzione ai seguenti punti:

- elementi di base (ipotesi semplice e composta, errore di primo e secondo tipo, statistica test e sua distribuzione, livello di significatività osservato, regione critica, funzione di potenza);
- test basati sul rapporto di verosimiglianza;
- test ottimi (opzionale);
- verifica delle ipotesi nell'impostazione bayesiana (opzionale).

Si presentino inoltre almeno due metodi per verificare l'ipotesi $H_0 : \pi = 1/10$ contro $H_1 : \pi \neq 1/10$, dove π è il parametro di una distribuzione binomiale con n noto.

Tema 2

Il candidato illustri la nozione di sufficienza nell'inferenza statistica con particolare attenzione ai seguenti punti:

- statistiche sufficienti: definizione, interpretazione, teorema di fattorizzazione;
- statistiche sufficienti minimali;
- statistiche sufficienti e verosimiglianza;
- statistiche sufficienti e famiglie esponenziali;
- il ruolo delle statistiche sufficienti nella teoria della stima puntuale o della verifica delle ipotesi (opzionale).

Si presentino inoltre una esemplificazione nell'ambito delle famiglie esponenziali ed una al di fuori di tale ambito.

Tema 3

Il candidato illustri la teoria relativa alla costruzione di regioni di confidenza con particolare attenzione ai seguenti punti:

- elementi di base (definizione, probabilitàdi copertura, livello di confidenza e suo significato, ruolo nell'unferenza statistica);
- costruzioni di regioni di confidenza basate su quantità pivotali;
- impostazione di Neyman (opzionale);
- impostazione basata sulla verosimiglianza;
- regioni di credibilità nell'impostazione bayesiana all'inferenza (opzionale).

Si presentino inoltre almeno due metodi per la costruzione di una regione di confidenza per il parametro π di una distribuzione binomiale con n noto, e si commenti la bontà dei metodi utilizzati nel caso in cui la stima di massima verosimiglianza di π risulti pari a 1/10.

Quesito comune ai tre temi

Un modello statistico dipende da un parametro θ, che varia con continuità nell'intervallo $(0, 1)$. Nella seguente tabella sono riportati i valori assunti dalla funzione di log-verosimiglianza in corrispondenza di un fissato risultato sperimentale e per alcuni valori di θ.

θ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$l(\theta)$	6.12	6.61	8.08	10.00	9.12	8.98	8.51	8.08	6.68

È noto inoltre che nel caso in esame: (i) la funzione di verosimiglianza ammette un solo massimo in corrispondenza di $\theta = 0.4$; (ii) risulta possibile fare riferimento alla teoria asintotica.

1. Verificare a un livello di significatività approssimativamente uguale a 0.05 l'ipotesi $H_0 : \theta = 0.9$ contro $H_1 : \theta \neq 0.9$; calcolare il livello di significatività osservato,

2. Determinare un intervallo di confidenza con livello approssimativamente uguale a 0.95 per θ.