

Tema 1

Il candidato svolga sia la parte comune del compito (Parte I) che una delle parti specializzate in Parte II, che coprono i vari ambiti d'interesse della Scuola di Dottorato in Scienze Statistiche.

Parte I

Base

1. Sia X una variabile aleatoria a valori in $[0, \pi]$ assolutamente continua con densità $p_X(x) = c \sin(x)I_{[0, \pi]}(x)$, $c > 0$.
 - (a) Determinare la costante c affinché $p_X(x)$ sia effettivamente una funzione di densità su $[0, \pi]$.
 - (b) Calcolare media e varianza di X .
2. La verifica delle ipotesi statistiche parametriche: aspetti principali.

Parte II

Statistica

Sia $x = (x_1, \dots, x_n)$ un campione casuale semplice di dimensione n da una distribuzione uniforme $U(a, b)$ (con $b > a$).

1. Si indichi la regione dello spazio parametrico in cui la funzione di verosimiglianza $L(a, b)$ è non nulla, fornendo il valore che essa assume su tale regione.
2. Si derivi lo stimatore di massima verosimiglianza (\hat{a}, \hat{b}) per (a, b) .
3. Si derivi la distribuzione esatta di (\hat{a}, \hat{b}) nel caso in cui $n = 2$, quando i veri valori dei parametri sono $a = 0$ and $b = 1$.

Demografia

Lo studio delle variazioni di cadenza e di intensità finale nell'analisi della fecondità tramite indicatori trasversali e longitudinali.

Statistica sociale

Inquadrando il problema nel contesto più generale della qualità dei dati, descrivere le varie tipologie di non risposta ad una indagine e illustrarne gli effetti sui risultati ottenuti.

Statistica economica

Trend deterministici e trend stocastici nell'analisi delle serie storiche economiche.

1. Specificare le caratteristiche principali del modello con non stazionarietà deterministica.
2. Specificare le caratteristiche principali del modello con non stazionarietà stocastica.
3. Confrontare e discutere le due specificazioni.
4. Formulare test di stazionarietà e non stazionarietà appropriati per discriminare tra le due specificazioni.

Tema 2

Il candidato svolga sia la parte comune del compito (Parte I) che una delle parti specializzate in Parte II, che coprono i vari ambiti d'interesse della Scuola di Dottorato in Scienze Statistiche.

Parte I

1. Sia X una variabile aleatoria a valori in $[0, \pi]$ assolutamente continua con densità $p_X(x) = c \sin(x) I_{[0, \pi]}(x)$, $c > 0$.
 - (a) Determinare la costante c affinché $p_X(x)$ sia effettivamente una funzione di densità su $[0, \pi]$.
 - (b) Calcolare media e varianza di X .
2. Regioni di confidenza e stima intervallare.

Parte II

Statistica

Si consideri un campione casuale semplice di dimensione n da una distribuzione di Poisson con media $\lambda > 0$. I valori delle n realizzazioni non sono disponibili; è noto solamente che n_0 di queste sono pari a 0, n_1 sono pari a 1 e le rimanenti $n - n_0 - n_1$ sono maggiori di 1.

1. Si scriva la funzione di logverosimiglianza $\ell(\lambda)$.
2. Si ottenga una equazione soddisfatta dalla stima di massima verosimiglianza $\hat{\lambda}$.
3. Con $n = 20$, $n_0 = 8$, $n_1 = 7$, si ottenga una approssimazione di $\hat{\lambda}$ mediante metodi numerici (è possibile utilizzare il valore 0.916 per l'inizializzazione dell'algoritmo).
4. Si proponga uno stimatore per λ che non sia basato sulla funzione di logverosimiglianza $\ell(\lambda)$, stabilendo se è non distorto.

Demografia

Teoria della seconda transizione demografica e le specificità italiane.

Statistica sociale

Nella specificazione di modelli per l'analisi della relazione tra variabili spesso è necessario operare la selezione di un adeguato insieme di variabili esplicative. Illustrare la problematica e le procedure statistiche più adatte a pervenire alla scelta del modello finale.

Statistica economica

Sia x_t , $t = 1, \dots, n$, una serie storica generata dal modello AR(1): $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$, dove Z_t è un white noise Gaussiano di media nulla e varianza unitaria. Esaminare il problema della stima di ϕ con procedure basate sul metodo dei momenti, sui minimi quadrati e sulla massima verosimiglianza. In particolare:

1. Determinare, quando è possibile, l'espressione analitica degli stimatori.
2. Confrontare e discutere le differenze tra le diverse procedure.
3. Discutere le loro proprietà.

Tema 3

Il candidato svolga sia la parte comune del compito (Parte I) che una delle parti specializzate in Parte II, che coprono i vari ambiti d'interesse della Scuola di Dottorato in Scienze Statistiche.

Parte I

1. Sia X una variabile aleatoria a valori in $[0, \pi]$ assolutamente continua con densità $p_X(x) = c \sin(x) I_{[0, \pi]}(x)$, $c > 0$.
 - (a) Determinare la costante c affinché $p_X(x)$ sia effettivamente una funzione di densità su $[0, \pi]$.
 - (b) Calcolare media e varianza di X .
2. I principali metodi di stima nell'inferenza classica.

Parte II

Statistica

Si ritiene che il tempo T alla recidiva (in mesi) in pazienti sottoposti ad un dato trattamento farmacologico segua la distribuzione:

$$p_T(t, \beta) = \beta^2 t e^{-\beta t}, \quad t > 0, \quad \beta > 0,$$

dove β è non noto. Per stimare β , al tempo $t = 0.0$ viene estratto un campione casuale semplice di 10 pazienti che vengono seguiti per 6 mesi. In questo periodo, per 6 pazienti si verifica l'insorgere della recidiva ai tempi t_1, \dots, t_6 , con $\sum t_i = 13.2$. Per i restanti 4, non si verifica l'insorgere della recidiva.

1. Si mostri che la probabilità di non osservare l'insorgere della recidiva (espressa in funzione di β) è data da $p(\beta) = (1 + 6\beta)e^{-6\beta}$.
2. Si spieghi perché la verosimiglianza soddisfa l'espressione $L(\beta) \propto \beta^{12}(1+6\beta)^4 e^{-37.2\beta}$.
3. Si fornisca la stima di massima verosimiglianza $\hat{\beta}$ di β .
4. Si fornisca un intervallo di confidenza per β , con livello di copertura approssimato 0.95.

Demografia

Il modello di transizione demografica e la sua realizzazione in Europa.

Statistica sociale

In molte indagini si raccolgono informazioni utilizzando diversi quesiti. Spesso il problema è quello della sintesi. Si inquadri il problema dell'analisi di dati multivariati dal punto di vista sostanziale e metodologico, con riferimento a possibili situazioni applicative.

Statistica economica

Variabili non osservabili ed errori di misura nelle relazioni tra variabili economiche. Con riferimento ad un esempio tratto dalla teoria economica:

1. specificare un modello di regressione con errori nelle variabili;
2. discutere il problema dell'identificazione dei parametri e indicare come può essere risolto;
3. mostrare l'inadeguatezza dello stimatore classico dei minimi quadrati in questa situazione;
4. delineare una procedura di stima dei parametri che goda di proprietà accettabili.